ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
2. фебруар 2018

Професор: Бојан Башић

1. Кажемо да је природан број n *строго непалиндромичан* уколико његов запис ни у једној бази b за $2 \leqslant b \leqslant n-2$ не представља палиндром. Наћи све сложене строго непалиндромичне бројеве.

   Једна идеја: Искористити први задатак из септембарског испитног рока — подсећање, у њему се тврди да су сви строго непалиндромични бројеви већи од 6 прости.

2. Нека је n природан број и p прост број. Тада, уколико је α највећи број такав да $p^\alpha \mid n!$ (тј. $p^\alpha \mid n!$ и $p^{\alpha+1} \nmid n!$), доказати да важи

$$\alpha = \frac{n - s_p(n)}{p-1},$$

   где $s_p(n)$ означава суму цифара броја n у систему са основом p.

   Једна идеја: Записати n у облику

$$n = \langle a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \rangle_p = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i.$$

   Приметити да из Лежандрове формуле имамо:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i p^i}{p^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \sum_{i=0}^{k} a_i p^{i-j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{k} a_i p^{i-j} + \left\lfloor \sum_{i=0}^{j-1} a_i p^{i-j} \right\rfloor \right),$$

   па, на основу неједнакости

$$\sum_{i=0}^{j-1} a_i p^{i-j} \leqslant \sum_{i=0}^{j-1} (p-1) p^{i-j} < (p-1) \sum_{u=1}^{\infty} p^{-u},$$

   закључити чему је једнака вредност $\lfloor \sum_{i=0}^{j-1} a_i p^{i-j} \rfloor$, и потом настављајући горње извођење добити колико износи α (у наставку најпре заменити редослед сумирања, тј. применити $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{k} a_i p^{i-j} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} a_i p^{i-j}$).

3. Нека је p прост број облика $4k+3$, и q произвољан непаран прост број. Доказати:

$$\left(\frac{-p}{q} \right) = \left(\frac{q}{p} \right).$$

4. Доказати да за сваки паран природан број n, $n \geqslant 4$, постоје $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ такви да важи

$$n = \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \varphi(d).$$